אלגברה לינארית לפיזיקאים – תרגול 5

נושאים:

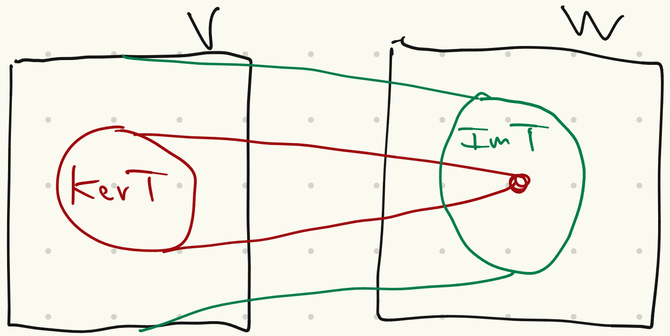
- טרנספורמציות (העתקות) לינאריות.
- יצוג טרנספורמציה ע"י מטריצה.

תזכורת:

1) $T: V \to W$ העתקה לינארית אם:

א. $T(v_1+v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

ב. $T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1)$



2) הגרעין מוגדר ע"י: $\ker T = \{ v \in V \mid T(v) = 0 \}$

כלומר, כל הוקטורים ש: T שולחת אותם לאפס.

3) התמונה מוגדרת ע"י: $\operatorname{Im} T = \{ T(v) \mid v \in V \}$

כלומר, כל הוקטורים שאתקבלים לאחר שמפעילים את T על איברים ב: V.

- Ker T הוא תת מרחב של V.
- Im T הוא תת מרחב של W.

מעבירה מהמרחב עצמו.

תרגיל 1: תהי העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

המוגדרת ע"י: $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

הערה: כדי להגדיר העתקה לינארית, מספיק להגדיר אותה על **איברי בסיס**.

א. מצאו את $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

מתכונות הלינאריות של ההעתקה

פתרון:

$$T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = T\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = x\cdot T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\cdot T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

מהנתון

$$= x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+3y\\2x+4y\end{pmatrix}$$

ג. מצאו מטריצה $A_{2\times 2}$ כך ש:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

פתרון:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \overset{\text{מסעיף א'}}{=} \begin{pmatrix}x+3y\\2x+4y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}}_{\text{זו המטריצה } A.}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

הערה: המטריצה A נקראת "המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי".

ג. מצאו את $\ker T$.

<u>פתרון:</u>

נשים לב ש: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker T$ אם $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

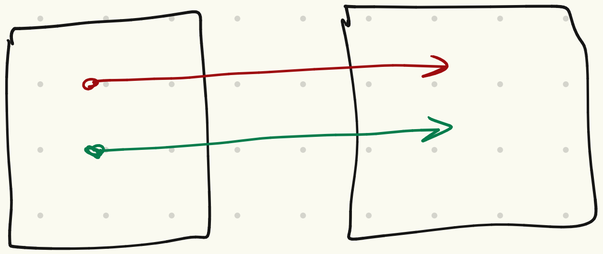
כלומר, $\ker T$ הוא מרחב הפתרונות ההומוגניים

של המערכת לעיל. כדי למצוא אותו, נעבור:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

כלומר, הפתרון היחיד הוא $x = y = 0$, ולכן $\ker T = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

הערה: מכיוון ש: $\ker T=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$, נובע כי T חח"ע.



חח"ע: כל שני וקטורים שונים מובילים למקומות שונים.

ג. מצאו את $\operatorname{Im} T$.

פתרון: ניתן לפתור ישירות (תרגול בבית), אבל אנו נראה דרך יותר מתחכמת.

תזכורת: משפט המימדים: תהי $T: V \to W$, אז:

$$\dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Im} T)=\dim(V)$$

במקרה שלנו: $\dim V = 2 \Leftarrow V=\mathbb{R}^2$

$\dim(\ker T)=0 \Leftarrow \ker T=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

ולכן לפי המשפט: $\dim(\operatorname{Im} T)=2$.

נלכוד כי $\operatorname{Im} T$ הינו תת מרחב של $\mathbb{R}^2$. מכיוון שהמימד שלה הוא 2, בהכרח הינו שווה לכל המרחב! $(\operatorname{Im} T=\mathbb{R}^2)$.

תרגיל 2: תהי העתקה לינארית $S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

המוגדרת ע"י: $S\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $S\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$

הערה: כיון ההעתקה מוגדרת על איברי הבסיס:

$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ במקום הבסיס הסטנדרטי.

א. מצא את $S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

פתרון: נניח שאנו יודעים את המקדמים של $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ בבסיס B.

כלומר:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\beta_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\beta_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

β_1,β_2 נקראים הקואורדינטות של $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ בבסיס B.

$$\Rightarrow S\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = S\left(\beta_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) \underset{\text{מהלינאריות של } T}{=} \beta_1 S\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta_2 S\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

מהנתון

$$= \beta_1\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$$

כלומר, אם נצא מה הם β_1, β_2 נוכל לסיים את התרגיל.

מהתרגול הקודם ראינו כי: $\beta_1 = \frac{x+y}{2}$, $\beta_2 = \frac{x-y}{2}$

$$\Rightarrow S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x+y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2x-2y\\-2x+2y\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x-y\\-x+3y\end{pmatrix}$$

מ. אז מטריצה A כך ש: $S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

(המטריצה המייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי).

<u>בתרגיל:</u>

$$S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-y\\-x+3y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}}_{\text{זו המטריצה } A.}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ד. חשב את $T\circ S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ← מתרגיל 1.

פתרון:

מהגדרת S

$$T\circ S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\left(S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=T\left(\begin{pmatrix}3x-y\\-x+3y\end{pmatrix}\right)$$

מהגדרת T

$$=\begin{pmatrix}(3x-y)+3(-x+3y)\\2(3x-y)+4(-x+3y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8y\\2x+10y\end{pmatrix}$$

ראינו קודם כי:

$$S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-y\\-x+3y\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y\\2x+4y\end{pmatrix}$$

בתרגיל נוסף:

ניתן לבטא באמצעות כפל מטריצות!

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T\circ S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&8\\2&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8y\\2x+10y\end{pmatrix}$$

← כלומר, הצענו לנקודה בקורס בה מבינים "פורמלית" למה כפל מטריצות מוגדר כפי שהוא מוגדר:

כי מטריצות מייצגות העתקות!